О ПРАКТИКЕ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ В ЛОГИСТИКЕ

Владимир Чирухин,
к.т.н., доцент департамента логистики
и управления цепями поставок,
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Владимир Прохоров,
к.ф-м.н, доцент департамента
логистики и управления цепями поставок,
Санкт-Петербургский филиал
Национального исследовательского университета
«Высшая школа экономики»

Аннотация. При применении на практике метода анализа иерархий разными авторами отмечаются трудности достижения необходимого значения согласованности суждений для матриц парных сравнений порядков выше четвертого. В данной статье рассматриваются два практических метода построения матриц парных сравнений, позволяющих решить эту проблему. Приведены результаты применения предлагаемых методов для решения задач логистики.

Ключевые слова. Матрица парных сравнений, принятие решений, вектор приоритетов, метод анализа иерархий, суждения, сравнения, оценки, приоритеты.

Annotation. When applied in practice, the General method of analysis of hierarchies by different authors difficulties achieving the required consistency value judgments for matrices of paired comparisons orders above the fourth. This article discusses two practical method for building matrixes of pairwise comparisons, allowing to resolve this problem. An illustration of practical applying for solving logistical problems is included.

Key words. Matrix of pairwise comparisons, decision-making, vector of priorities, Analytic Hierarchy Process, judgements, comparisons, ratings, priorities.

Введение

В процессе ведения бизнеса, как правило, приходится учитывать множество факторов, от которых зависит принятие правильного решения, что становится весьма трудной задачей без применения специальных методов.

Такие задачи часто встречаются в процессе управления логистическими системами, например, при выборе логистического посредника. Для ее решения в литературе по логистике обычно приводятся многокритериальные методы принятия решений, основанные на свертывании критериев, когда вместо N частных критериев $f_1, f_2, \dots f_N$ рассматривается один скалярный критерий, полученный путем комбинации частных критериев.

Обычно применяются следующие методы: аддитивной свертки критериев, мультипликативной свертки критериев, минимаксного свертывания, метод уступок, метод «идеальной точки» [1]. В ряду многокритериальных методов принятия решений часто используется метод анализа иерархий (МАИ), который в логистической литературе не упоминается. По всей видимости, причиной тому является распространенная точка зрения о трудности или невозможности построения матриц парных сравнений, удовлетворяющих условиям согласованности суждений.

> В ряду многокритериальных методов принятия решений часто используется метод анализа иерархий (МАИ), который в логистической литературе не упоминается.

Метод анализа иерархий (МАИ) изложен в одной из первых книг Т.Л. Саати, переведенных на русский язык [2]. В соответствии с МАИ на основе экспертного мнения строится матрица парных сравнений факторов, влияющих на принятие решений, и сравниваемых объектов относительно этих факторов. Парные сравнения проводятся согласно фундаментальной шкале абсолютных значений для оценки силы суждений с выставлением соответствующей величины a_{ik} на пересечении i-ой строки и k-го столбца матрицы парных сравнений. Эта шкала приведена в [2–5]. В табл. 1 данная шкала воспроизведена из [3].

Шкала от 1 до 9 вырабатывалась во взаимодействии с психологами [4].

Аргументируется это следующим образом.

1. Способность человека производить качественные разграничения хорошо представлена пятью определениями: *слабый, равный, сильный, очень сильный, абсолютный*. Для большей точности можно пользоваться промежуточными определениями.
2. Классификация по трем основным зонам – *неприятие, безразличие, приятие*, каждая из которых делится на низкую, умеренную и высокую степени.
3. Психологический предел 7 ± 2 предметов при одновременном сравнении подтверждает, что если взять 7 ± 2 отдельных предметов, близких относительно свойства, используемого для сравнения, то требуется 9 точек, чтобы их различить [5].

Вычисленные собственные вектора этих матриц являются по своей сути векторами приоритетов, дающих возможность выбрать то решение, которое в большей степени соответствует предпочтениям лица, принимающего решение (ЛПР).

Если количество факторов, влияющих на решение, оказывается велико, то в этом случае все множество разбивается на части, именуемые уровнями иерархии, и для каждого уровня строятся свои матрицы. Результирующий вектор приоритетов получается согласно МАИ с использованием линейной свертки промежуточных решений, которым соответствуют собственные вектора матриц по уровням иерархии.

Проблема заключается в том, что при построении матриц порядков выше 3–4, как правило, матрицы получаются несогласованными [5] (в других источниках встречается перевод «несовместными», от англ. consistency [6, 7]). Для выяснения степени пригодности построенной матрицы парных сравнений для принятия решений Саати ввел понятие индекса согласованности (ИС), который он определил как $(\lambda_{max} - n) / (n - 1)$, где λ_{max} – максимальное собственное число матрицы, а n – порядок матрицы.

В качестве значения верхней границы применимости матрицы для дальнейших вычислений автор принял величину 10%, то есть при превышении данного значения ИС матрица считается некорректной для принятия решения. Несогласованность в суждениях ведет к построению несогласованной матрицы парных сравнений. Следствием является то, что использовать несогласованную матрицу для принятия решения некорректно, это должно привести к искажению картины и ошибке в решении. Кроме того, этот аргумент можно отнести в пользу перевода термина consistency в данном контексте как «согласованность».

Таблица 1.
Фундаментальная шкала абсолютных значений для оценки силы суждений
Источник: составлено авторами на основе [3]

1	Равная предпочтительность с точки зрения цели	Две альтернативы одинаково предпочтительны
2	Слабая степень предпочтения	Промежуточная градация между равным и средним предпочтением
3	Средняя степень предпочтения	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив немного предпочтительнее другой
4	Предпочтение выше среднего	Промежуточная градация между средним и умеренно сильным предпочтением
5	Заметное предпочтение	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив немного предпочтительнее другой
6	Сильное предпочтение	Промежуточная градация между средним и умеренно сильным предпочтением
7	Очень сильное (очевидное) предпочтение	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив гораздо предпочтительнее другой: доминирование альтернативы подтверждено практикой
8	Очень, очень сильное предпочтение	Промежуточная градация между очень сильным и абсолютным предпочтением
9	Абсолютное предпочтение	Очевидность подавляющей предпочтительности одной альтернативы над другой имеет неоспоримое подтверждение

При заметном превышении ИС величины 0,1 в [2] рекомендуется:

1. Найти самое несогласованное суждение в матрице парных сравнений.
2. Определить область значений, в которой должна находиться численная оценка несогласованного суждения, чтобы оно стало согласованным.
3. Предложить эксперту, заполнившему матрицу, пересмотреть суждения для улучшения согласованности. Если он не согласен, такая же процедура проводится со вторым, третьим и т.д. несогласованным суждением. Если же все суждения остались без изменений, а матрица не согласована, решение лучше отложить до тех пор, пока не будет лучшего понимания проблемы [4].

Такой подход способен затянуть принятие решения на неопределенный срок, что делает сам метод непригодным для применения, так как любое решение должно приниматься в разумные, и, как правило, в сжатые сроки.

1. Построение матриц парных сравнений на основе свойств идеальной матрицы сравнения

Для реализации первого практического метода задачи построения матрицы парных сравнений воспользуемся свойствами так называемой идеальной матрицы парных сравнений [5]. Идеальной матрица названа потому, что для иллюстрации метода МАИ эта матрица строилась из парного сравнения точно известных весов w_i камушков в количестве n штук. В реальности же веса предметов могут быть определены только с некоторой погрешностью, определяемой классом точности весов и погрешностью измерения. Этим и определяется термин

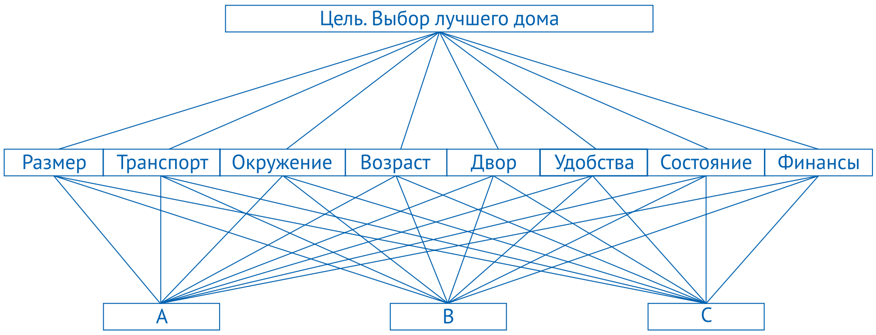

Рисунок 1. Иерархия для решения о выборе дома
Источник: [3]

«идеальная матрица». Такая матрица обладает следующими свойствами:

1. Для любого i справедливо равенство $a_{ii} = w_i / w_i = 1$ (элемент матрицы А, расположенный на пересечении i-й строки и i-го столбца, равен единице).
2. Для любых i и k справедливо равенство $a_{ki} = w_k / w_i = 1 / a_{ik}$ (произведение элемента матрицы А, расположенного на пересечении i-й строки и k-го столбца, на элемент матрицы А, расположенный на пересечении k-й строки и i-го столбца, равно единице).
3. Для любых i, k и m справедливо равенство $a_{ik} \times a_{km} = a_{im}$ (произведение элемента матрицы А, расположенного в i-й строке и k-м столбце, на элемент матрицы А, расположенный в k-й строке и m-м столбце, равно элементу матрицы А, расположенному в i-й строке и m-м столбце).
4. Столбец $w = (w_1, w_2, \ldots w_n)$ является собственным столбцом матрицы А с собственным значением $\lambda = n$.

Сравнивая эти свойства со свойствами обратно-симметричной и согласованной матрицы приходим к выводу, что идеальная матица парных сравнений является обратно-симметричной и согласованной. Этими свойствами можно воспользоваться для построения матриц парных сравнений.

Заметим, что при заполнении первой строки матрицы парных сравнений в ней уже заложены все предпочтения эксперта. Действительно, для дальнейших вычислений нужна полностью заполненная матрица, ее первый столбец можно получить из первой строки с помощью свойства обратной симметрии. Главная диагональ заполнится единицами, поскольку там сравниваются одинаковые величины (суть – факторы), а все оставшиеся элементы матрицы могут быть получены из свойства согласованности матрицы: $a_{im} = a_{il} \times a_{lm}$.

Подобный способ получить необходимое значение индекса согласованности матрицы парных сравнений приведен в одном из примеров, иллюстрирующих метод анализа иерархий [5], однако в данной работе не делается вывод о возможности построения таким образом матриц парных сравнений. Подробно проанализирован этот способ с доказательствами его применимости в [6].

Проиллюстрируем это на примере. В учебном процессе в качестве деловой игры обычно используется задача о выборе дома для покупки из трех имеющихся вариантов, описанная в [3]. В ней рассматривается гипотетическая ситуация выбора семьей дома, когда семья должна учесть восемь важных критериев.

1. **Размер** – число и размер комнат, площадь подсобных помещений, общая площадь дома.
2. **Транспорт** – удобство и близость метро и автобуса.
3. **Окружение** – ближайшие окрестности дома: интенсивность движения транспорта, безопасность, вид местности, налоги, состояние окружающих зданий.
4. **Возраст** – как давно построен дом.
5. **Двор** – пространство двора со всех сторон дома, а также пространство, разделяемое с соседями.
6. **Удобства** – современные средства обслуживания: посудомоечная машина, мусоропровод, кондиционирование воздуха, система сигнализации.
7. **Состояние** – общее состояние дома: стен, пола, проводки, обоев, чистота; необходимость ремонта.
8. **Финансы** – предполагаемая ликвидность, условия оплаты, возможности кредитования [3].

Задание формулируется следующим образом. Команда студентов из 2–3 человек по заранее заданным характеристикам трех домов и своим предпочтениям относительно восьми приведенных критериев должна осуществить выбор дома методом анализа иерархий. Иерархия студентам дается из примера Т.Л. Саати (рис. 1).

В ходе игры студентам предстояло составить по одной матрице парных

Таблица 1.
Матрица парных сравнений

Фактор	Размер	Транспорт	Окружение	Возраст	Двор	Удобства	Состояние	Финансы
Размер	1	2	4	0,5	6	0,2	3	0,33
Транспорт	0,5	1						
Окружение	0,25		1					
Возраст	2			1				
Двор	0,17				1			
Удобства	5					1		
Состояние	0,33						1	
Финансы	3							1

сравнений размером 8 × 8 и по 8 матриц размером 3 × 3. Игра проводилась со студентами неоднократно в течение нескольких лет.

В табл. 1 приводятся сопоставленные с фундаментальной шкалой предпочтения одной из групп студентов (в первой строке и в первом столбце) и в табл. 2 составленная по ним матрица парных сравнений.

Элемент в третьей строке второго столбца: $a_{32} = a_{31} \times a_{12}$ = 0,25 × 2 = 0,5. Аналогично находится элемент, например, на пересечении критерия «двор» и «возраст»: $a_{53} = a_{51} \times a_{15}$ = 0,17 × 0,5 = 0,085. Таким способом можно заполнить элементами всю матрицу парных сравнений (табл. 2). При этом индекс согласованности матрицы равен 0,00002, что свидетельствует о достаточной степени согласованности суждений и о пригодности составленной матрицы для принятия решений.

Таким образом, при наличии первой строки все элементы матрицы могут быть определены. Решение данной задачи также требует специального подхода.

Если количество факторов, влияющих на решение, оказывается велико, то в этом случае все множество разбивается на части, именуемые уровнями иерархии, и для каждого уровня строятся свои матрицы.

Таблица 2.
Матрица парных сравнений и индекс согласованности ИС

Фактор	Размер	Транспорт	Окружение	Возраст	Двор	Удобства	Состояние	Финансы	Вектор приоритетов
Размер	1	2	4	0,5	6	0,2	3	0,33	0,082
Транспорт	0,5	1	2	0,25	3	0,1	1,5	0,165	0,041
Окружение	0,25	0,5	1	0,125	1,5	0,05	0,75	0,0825	0,020
Возраст	2	4	8	1	12	0,4	6	0,66	0,163
Двор	0,17	0,34	0,68	0,085	1	0,034	0,51	0,0561	0,014
Удобства	5	10	20	2,5	30	1	15	1,65	0,408
Состояние	0,33	0,66	1,32	0,165	1,98	0,066	1	0,1089	0,027
Финансы	3	6	12	1,5	18	0,6	9	1	0,245
ИС = 0,00002									

2. Построение матриц парных сравнений с помощью сопоставления предпочтений с фундаментальной шкалой сравнений

В [6, 7] предлагается строить первую строку по так называемой схеме «сравнения с образцом». Эксперту предлагают сравнить вес первого объекта с весом второго объекта и указать положительное число, показывающее, во сколько раз вес первого объекта больше веса второго объекта. В результате выполнения такого сравнения эксперт назначает некоторое положительное число a_{12}. Далее для сравнения с первым объектом рассматривается третий объект и в результате сравнения экспертом указывается число a_{13}, и т.д. После выполнения сравнений первого объекта со всеми остальными будут назначены положительные числа $a_{12},..a_{1n}$. Тем самым с учетом равенства a_{11} = 1 будет известна вся первая строка матрицы [6].

Можно подойти к построению матрицы парных сравнений иначе. Изначально необходимо обозначить свои предпочтения на 9-балльной шкале, которая соответствует фундаментальной шкале абсолютных значений для оценки силы суждений.

Далее вычисляются элементы матрицы делением соответствующих значений, взятых из полученной таблицы сопоставления предпочтений с фундаментальной шкалой сравнений.

В качестве примера в табл. 3 приводятся сопоставленные с фундаментальной шкалой предпочтения одной из групп студентов и в табл. 4 составленная по ним матрица парных сравнений.

Элемент в первой строке, например, на пересечении критерия «размер» и «транспорт» рассчитывается как отношение 9/8, а элемент на пересечении критерия «финансы» и «двор» – как отношение 7/1.

Индекс согласованности приведенной матрицы равен 0, что свидетельствует о высокой степени согласованности суждений и о пригодности составленной матрицы для принятия решений.

3. Практика применения способов построения матриц парных сравнений

Предлагаемые два способа составления согласованных матриц парных сравнений позволяют получить матри-

Таблица 3.
Сопоставление значений фундаментальной шкалы сравнений и факторов, влияющих на принятие решения

Фактор	Соответствующие критерию баллы по фундаментальной шкале сравнений
Размер	9
Транспорт	8
Окружение	3
Возраст	4
Двор	1
Удобства	6
Состояние	5
Финансы	7

Таблица 4.
Матрица парных сравнений и индекс согласованности ИС

Фактор	Размер	Транспорт	Окружение	Возраст	Двор	Удобства	Состояние	Финансы	Вектор приоритетов
Размер	1	1 1/8	3	2 1/4	9	1 1/2	1 4/5	1 2/7	0,209302
Транспорт	8/9	1	2 2/3	2	8	1 1/3	1 3/5	1 1/7	0,186047
Окружение	1/3	3/8	1	3/4	3	1/2	3/5	3/7	0,069767
Возраст	4/9	1/2	1 1/3	1	4	2/3	4/5	4/7	0,093023
Двор	1/9	1/8	1/3	1/4	1	1/6	1/5	1/7	0,023256
Удобства	2/3	3/4	2	1 1/2	6	1	1/5	6/7	0,139535
Состояние	5/9	5/8	1 2/3	1 1/4	5	5/6	1	5/7	0,116279
Финансы	7/9	7/8	2 1/3	1 3/4	7	1 1/6	1 2/5	1	0,162791
ИС = 0									

цы с приемлемыми значениями индекса согласованности. При этом составленные матрицы содержат в себе всю информацию о предпочтениях лица, принимающего решения. Накопленные данные при проведении описанной деловой игры со студентами позволяют говорить о практическом значении предлагаемых способов построения матриц парных сравнений.

Нескольким группам студентов было предложено провести работу по выбору дома в игровой форме так, как изложено выше. Им предстояло в процессе работы построить матрицы 8 × 8 тремя способами: так, как предлагает в своих работах решать вопрос Саати, и двумя описанными способами. Не все группы студентов применили на практике все три подхода к построению матриц, поэтому значения, соответствующие количеству построенных тем или иным способом матриц, разнятся.

Из 89 матриц, построенных по рекомендациям Саати, только 11 оказались пригодными к дальнейшей работе для лиц, принимающих решения. Все составленные с помощью методов, предлагаемых в пунктах 1 и 2 настоящей работы, матрицы парных сравнений размером 8 × 8 оказались в достаточной мере согласованными, т.е. пригодными для дальнейшей работы и принятия решения.

Индексы согласованности матриц укладываются в требуемые значения (практически равны нулю). Первым и вторым описанными способами было построено соответственно 80 и 82 матрицы. Решения, принятые на основании построенных матриц относительно выбора дома, не совпали в 23 случаях (или в 25%). Это объясняется различием предпочтений, заложенных в формировании первой строки матриц, построенных разными способами. Второй способ формирования матриц парных сравнений представляется наиболее предпочтительным. После построения первой строки достраивание матрицы можно осуществлять либо по первому, либо по второму способу, результат, как показывает практика, будет одинаковым.

Заключение

В данной работе предлагаются два способа составления согласованных матриц парных сравнений, которые позволяют получить матрицы с приемлемыми значениями индекса согласованности, то есть ИС ⩽ 10%. При этом составленные матрицы содержат в себе всю информацию о предпочтениях лица, принимающего решения.

Апробация методов выполнена на основе статистики, полученной при проведении описанной в статье деловой игры со студентами, что позволяет говорить о практическом значении предлагаемых способов построения матриц парных сравнений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Модели и методы теории логистики: учебное пособие. 2-е изд. / под ред. В.С. Лукинского. – СПб. Питер, 2007. – 448 с.: ил.
2. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р.Г. Вачнадзе – М.: Издательство «Радио и связь», 1993. – 278 с.
3. Саати Т.Л. Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети / пер. с англ. под науч. ред. А.В. Андрейчиков, О.Н. Андрейчикова. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 360 с.
4. Саати Т.Л. Об измерении неосязаемого. Подход к относительным измерениям на основе главного собственного вектора матрицы парных сравнений // Электронный журнал Cloud of Science. – 2015. – Т.2. – № 1.
5. Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: учебное пособие. 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2002. – 440 с.
6. Ногин В.Д. Упрощенный вариант метода анализа иерархий на основе нелинейной свертки критериев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т.44. – №7. – С. 1261–1270.
7. Ногин В.Д. Принятие решений при многих критериях: учебно-методическое пособие. – СПб: Юстас, 2007. – 103 с.